数理解析研究所講究録
233巻 1975年 9-13

The Schur subgroup and Schur index

都立大 理　　山田俊彦

kは標数0の体，Gは有限群とする．Gのk上の群環kGは半単純である：

$$kG = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_s .$$

我々は各単純成分A_iをSchur多元環とよぶ．χをGの絶対既約指標とすると，$\chi(A_i) \neq 0$なる単純成分A_iが唯一つ存在する．この単純成分A_iのindexはχのk上のSchur index $m_k(\chi)$である．A_iの中心は指標の体$k(\chi)$で，$[A_i : k(\chi)] = \chi(1)^2$.
A_iはある多元体D上の行列環：$A_i = M_t(D)$，ここで$t = \chi(1)/m_k(\chi)$．したがってもしDがわかればA_iは完全に決定されることになる．

ところでDはある既約kG-加群Mの準同型環である：
$D = \mathrm{End}_{kG}(M)$．しかるに既約kG-加群Mを決定するalgorithmは一般にはなにもない．したがって多元体Dを決定するalgorithmはなにもないのではないかと思われるかもしれない．しかしながら1950年代の初めに，BrauerとWittによ

り，A_i は G の乗法表と χ により effective に決定されることが確定した．たとえばもし k が代数体ならば，$k(\chi)$ の各素点 $\mathfrak{p}$ に対して Hasse invariant $\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}}(A_i)$ が実際に計算可能というわけである．

詳しくいうと，彼等はこの問題を G の hyperelementary subgroups に対するそれに帰着させた．そしてそれはさらに円分多元環に対する問題にまで簡単化された．ここで円分多元環とは，

$$(\beta, K(\zeta)/K), \quad \beta(\sigma,\tau) \in \langle \zeta \rangle, \quad (K \supset k(\chi))$$

なる形の crossed product である．これらの結果は Brauer-Witt の定理とよばれている．この定理の内容はかなり複雑で，彼等の証明はたいへん難解であった．しかしながら多くの人の努力により，証明はいちじるしく簡易化された．今や我々は，Brauer-Witt の定理の完全な形とその証明を，筆者の講義ノート [1] の中に見出すことができる．

さて k 上の Brauer 群 $Br(k)$ の Schur 部分群 $S(k)$ は，k 上の正規単純多元環でかつ Schur 多元環であるようなものを含む多元環類の全体として定義される．ところで Brauer-Witt の定理の系として，Schur 部分群 $S(k)$ は k 上の円分多元環を含む多元環類の全体であることが分る．したがって Schur 部分群の研究は，円分多元環の研究に帰着された．

k が p 進体 Q_p の有限次拡大のとき，Schur 部分群 $S(k)$ は筆者により完全に決定された．k は円体と仮定してよいことがわかる．ζ を 1 の巾根とし，$Q_p(\zeta) \supset k$ とするとき，$Q_p(\zeta)/k$ の inertia group の構造により $S(k)$ が決定されるのである．詳細は以下の通り：

(I) $p \neq 2$ とする．$Q_p(\zeta)$ は k と ζ_p を含む円分体，e を $Q_p(\zeta)/k$ の分岐指数，$e = e_0 e'$，$(e_0, p) = 1$，$e' = p$ 巾とする．そのとき $S(k)$ は $Br(k)$ の位数 e_0 の唯 1 つの部分群である．

(II) $p = 2$ とする．$Q_2(\zeta)$ は k と ζ_4 を含む円分体，$Q_2(\zeta)$ に含まれる最大の 2 巾根を ζ_{2^n} とする．もし $Q_2(\zeta)/k$ の Galois 群が $\iota(\zeta_{2^n}) = \zeta_{2^n}^{-1}$ なる automorphism ι を含めば，$S(k)$ は $Br(k)$ の位数 2 の唯一つの subgroup である．その他の場合は $S(k) = 1$．

たとえば Q が有理数体，G が 2-group のとき，G のすべての既約指標 χ に対し $m_Q(\chi) = 1$ or 2 であり，もし $Q(\chi)$ が実でなければ $m_Q(\chi) = 1$ であることなどは，(II) から直ちに分る．

また筆者は p 進円分多元環の Hasse 不変数に対する非常に有用な公式をえた．実際その公式を用いることにより，我々は k が代数体のときの Schur 部分群 $S(k)$ を研究することができる．いくつかの円体 k に対して $S(k)$ は決定されている．

筆者はまた cohomology 的な議論により，一般に複雑な Galois 群をもつ円分多元環が簡単な Galois 群をもつ円分多元環と相似であることを示した．すなわちおおざっぱにいって次のことがなりたつ：

$$(\beta,\ k(\zeta_n)/k) \sim (\alpha,\ k(\zeta_{p_1\cdots p_t})/k), \qquad n = p_1^{a_1}\cdots p_t^{a_t}.$$

この結果は最近 Janusz により強められた．すなわちおおざっぱにいって次のとおり：

$$(\alpha,\ k(\zeta_{p_1\cdots p_t})/k) \sim \prod_i (\alpha_i,\ k(\zeta_{p_i})/k).$$

k が代数体のときの $S(k)$ の研究は，現在多くの人により進行中であるが，かなり整数論的であるので省略する．

最後に次の結果を述べてこの小文を終えることにしよう：

定理（Fein-Yamada）．G を有限群，χ を G の既約指標，$m = m_Q(\chi)$ とする．そのとき m は G の exponent $\exp(G)$ を割り，m^2 は G の位数を割る．さらに

(i) もし $2^r \mid m$ ならば，$2^{r+1} \mid \exp(G)$；

(ii) もし $p \mid m$ かつ G の Sylow p-subgroup が abelian ならば，$p^{r+1} \mid \exp(G)$.

Brauer-Witt の定理を用いることにより，最初の主張は比較的容易にえられる．主張 (i), (ii) の証明は少し難しい．そしてそれらはかなり有用で，たとえば次の諸結果が直ちにえられる．

系. すべての p に対して G の p-Sylow 群が elementary abelian であれば, G の任意の既約指標 χ に対して $m_{\mathbb{Q}}(\chi)=1$.

位数 175,560 の Janko 群 J_a は, そのすべての p-Sylow 群が elementary abelian だから, J_a の任意の既約指標 χ に対して $m_{\mathbb{Q}}(\chi)=1$.

また $G=\langle a\rangle\cdot P$ が素数 p における hyperelementary group で, G の p-Sylow 群 P が elementary abelian ならば, G のすべての既約指標に対してその $\mathbb{Q}$ 上の Schur index は 1 である.

文献

[1] T. Yamada, The Schur subgroup of the Brauer group, Lecture Notes in Math. Vol. 397, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.